ZADACI IZ ALGEBARSKE TOPOLOGIJE -I DIO

(1) Neka je $A_1 == \{(x,y,z) : x^2+y^2 = 1, 0 \leq z \leq 2\}$, $A_2 = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq 1, z = 0\}$, $A_3 = \{(0, cost, 2 + sint)\}, 0 \leq t \leq \pi\}$ i $A_4 = \{(0, 1 + cost, 1 + sint), -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}\}$. Dokazati da potprostori $X = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ i $Y = A_1 \cup A_2 \cup A_4$ nijesu homeomorfni ali da imaju isti homotopski tip.

(2) Neka je $a_n = (\frac{1}{n}, 0) \in \mathbb{R}^2$, $n \in N$ i neka se $X \subset \mathbb{R}^2$ sastoji od svih duži koje spajaju tačke a_n sa tačkom $(0,1)$ i svih duži koje spajaju tačke $-a_n$ sa tačkom $(0,-1)$. Dokazati da X nije kontraktibilan.

(3) Za linearno povezani prostor X kažemo da je 1-jednostavan ako su za svaka dva puta h i h' u X takva da je $h(0) = h'(0)$, $h(1) = h'(1)$ prirodni izomorfizmi $h_*, h'_* : \pi_1(X, h(1)) \to \pi_1(X, h(0))$ jednaki. Dokazatiu da je X 1-jednostavan ako i samo ako je grupa $\pi_1(X)$ Abelova.

(4)
- Neka je $S^1 \subset \mathbb{C}$ jedinična kružnica, a $f : S^1 \to S^1$ preslikavanje koje nije homotopno identičkom preslikavanju. Dokaži da postoji $a \in S^1$ tako da je $f(a) = -a$.
- Neka je $g : S^1 \to S^1$ antipodalno preslikavanje tj. $g(z) = -z$. Dokazati da je g homotopno identičkom preslikavanju.

(5) Opisati homomorfizam koji indukuje preslikavanje $f : S^1 \to S^1$ ako je
- $f(e^{i\varphi}) = e^{i(\pi+\varphi)},\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$
- $f(e^{i\varphi}) = e^{in\varphi\pi},\ 0 \leq \varphi \leq \pi,\ n \in \mathbb{Z},$
- $f(e^{i\varphi}) = \begin{cases} e^{i\varphi}, & 0 \leq \varphi \leq \pi \\ e^{i(2\pi-\varphi)}, & \pi \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$

(6) Neka je $f : S^1 \to \mathbb{R}$ neprekidno preslikavanje. Dokazati da postoji $z \in S^1$ tako da je $f(-z) = f(z)$.

(7) Neka je $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ neprekidno preslikavanje takvo da je $f(-x) = -f(x)$ za sve $x \in S^2$. Dokazati da postoji tačka $x \in S^2$ takva da je $f(x) = 0$.